



## Análisis funcional y física matemática<sup>1</sup>

Ricardo Weder<sup>2</sup>

**Resumen.** Se reporta resultados de investigación de proyectos en análisis funcional y física matemática. Esta disciplina consiste en el estudio de problemas de investigación en análisis funcional motivados por problemas de la física y en la resolución de problemas de la física con herramientas del análisis funcional. En otros términos, la física matemática vista

desde el análisis funcional. Se reportan los resultados obtenidos en la teoría espectral y de dispersión directa e inversa para ecuaciones de Schrödinger matriciales, en la paradoja de Bernstein-Landau en física de plasmas y en el efecto Casimir con condiciones dinámicas en la frontera en campos cuánticos.

**Palabras clave.** Análisis funcional; física matemática; teoría de operadores; mecánica cuántica; teoría espectral; teoría de dispersión; campos cuánticos

En años recientes la Dirección General de Asuntos del Personal Académico ha financiado generosamente varios proyectos de investigación del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) en temas de análisis funcional y física matemática de los cuales Ricardo Weder ha sido el investigador responsable. Esta disciplina consiste en el estudio de problemas originales de investigación en análisis funcional motivados por problemas de la física, y en la resolución de problemas de la física con herramientas de análisis funcional. En otros términos, la física matemática vista desde el análisis funcional.

- 1 Proyectos PAPIIT IN103918 y IN100321: Física Matemática y Análisis Funcional I y II
- 2 Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas. [weder@unam.mx](mailto:weder@unam.mx)



Se autoriza la copia, distribución y comunicación pública de la obra, reconociendo la autoría, sin fines comerciales y sin autorización para alterar, transformar o generar una obra derivada. Bajo licencia creative commons <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

El análisis funcional es una disciplina matemática fundamental. Entre los temas de la disciplina involucrados en estos proyectos del PAPIIT cabe destacar la teoría de perturbación de operadores, teoría espectral y de dispersión directa e inversa, operadores diferenciales y en derivadas parciales. Entre los temas de física en los que se trabajó cabe mencionar la mecánica cuántica, campos cuánticos, propagación de ondas y física de plasmas.

El uso del análisis funcional en la física es una disciplina que tiene una larga y distinguida historia, cuyo origen son los trabajos de J. von Neumann (1943) sobre la fundamentación matemática de la mecánica cuántica y las contribuciones seminales de T. Kato (1951) en las ecuaciones de Schrödinger para  $N$  cuerpos cuánticos, que mostraron de manera espectacular que los métodos del análisis funcional son de gran efectividad en el estudio de modelos particulares de la física. Los trabajos anteriores estudiaban problemas fundacionales y sistemas generales. Cabe mencionar también las contribuciones pioneras de P.D. Lax y R.S. Phillips (1967) en el estudio de ondas acústicas y electromagnéticas con métodos de análisis funcional. Apoyado en esta sólida tradición, con el paso del tiempo, el estudio de la física matemática desde el punto de vista del análisis funcional se ha convertido en una disciplina en la que existe una amplia actividad de investigación a nivel internacional en diversas áreas del análisis funcional. Algunas de estas áreas son: teoría espectral y de dispersión directa e inversa, teoría de perturbación de operadores, álgebras de operadores, en particular álgebras de von Neumann y  $C^*$ , ecuaciones diferenciales, parciales y discretas, análisis geométrico, entre otras. Entre las áreas de la física cabe mencionar a la mecánica cuántica no relativista y relativista, física de la materia condensada, mecánica estadística, campos cuánticos norelativistas y relativistas, campos cuánticos en espacios curvos, y física de plasmas.

Actualmente existe también en México una amplia actividad de investigación en análisis funcional y física matemática. Sin embargo, esta disciplina es relativamente nueva en nuestro país, encuentra su origen en la incorporación al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México de Ricardo Weder en 1978.

Entre los diversos resultados obtenidos en los proyectos PAPIIT en análisis funcional y física matemática cabe destacar los siguientes.

## Ecuaciones de Schrödinger matriciales

La ecuación de Schrödinger es la ecuación fundamental de la mecánica cuántica no relativista. En términos simples describe la evolución en el tiempo de la función de onda, que es una función a valores complejos, cuyo valor absoluto al cuadrado en un punto es la densidad de probabilidad de la presencia de la partícula cuántica en ese punto. Por otra parte, su fase describe diversos fenómenos de interferencia. La ecuación de Schrödinger se presenta en diversas formas; puede ser escalar, en cuyo caso la función de ondas toma valores complejos o puede ser matricial, y en este caso la función de ondas toma valores en un vector complejo, quiere decir que en cada punto del espacio la función de ondas consiste en un número finito de números complejos, que es el mismo en todos los puntos del espacio. En realidad, la ecuación de Schrödinger matricial es un sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones de Schrödinger matriciales encuentran su origen en el inicio mismo de la mecánica cuántica. Por ejemplo en el estudio de partículas con estructura interna como el espín, o el isoespín, en el estudio de átomos y moléculas en física y química cuántica. Más recientemente existe un gran interés en las ecuaciones de Schrödinger matriciales en el contexto del estudio de los grafos cuánticos, que son de gran interés, por ejemplo en nanotecnología, en el estudio de alambres cuánticos y en computación cuántica.

En los proyectos PAPIIT se estudió ecuaciones de Schrödinger matriciales en el semi-eje  $(0, \infty)$ . Para que el problema esté bien definido, tanto desde el punto de vista físico como matemático, es necesario especificar qué pasa cuando las partículas llegan al origen  $x = 0$ . Esto se hace mediante condiciones en la frontera  $x = 0$ , que en términos simples relacionan el valor de la función de ondas y su derivada en la frontera  $x = 0$ . Se estudió la teoría espectral del operador de Schrödinger asociado a la ecuación de Schrödinger matricial. Este estudio puede ser descrito como el análisis de los valores de la energía de las partículas para los cuales los estados físicos son ligados, es decir, que las partículas están confinadas en una región del espacio, al igual que los valores de la energía de las partículas para los cuales los estados son del continuo, que son estados donde las partículas pueden propagarse al infinito, que corresponde a  $x = \infty$ . Además se estudió la teoría de dispersión directa e inversa para las ecuaciones matriciales de Schrödinger. La teoría de dispersión es una teoría matemática, basada en el análisis funcional, que describe colisiones entre partículas cuánticas en diversos

problemas físicos. Por ejemplo, en el contexto de la mecánica cuántica, en colisiones entre partículas no relativistas y relativistas, así como en sistemas con infinitos grados de libertad, como los campos cuánticos que describen interacciones en las que se puede destruir y crear partículas. Por otra parte la teoría de dispersión se aplica en el estudio de fenómenos de propagación de ondas acústicas, electromagnéticas, elásticas y en ondas en física de plasmas.

En términos generales, la teoría de dispersión estudia fenómenos en los que el sistema físico, llamado sistema perturbado, puede ser aproximado por un sistema más simple, llamado sistema no perturbado, el cual típicamente puede ser resuelto explícitamente. El objeto de la teoría de dispersión es estudiar la asintótica para tiempos grandes de las soluciones del sistema perturbado y compararlas con las soluciones del sistema no perturbado. Se puede clasificar en teoría de dispersión directa y teoría de dispersión inversa. En la teoría de dispersión directa se supone que las fuerzas que actúan sobre las partículas son conocidas. Se calcula la asintótica de las soluciones para tiempos grandes y se la compara con las soluciones del problema no perturbado. Por el contrario, en la teoría de dispersión inversa se supone que se dispone de información sobre la asintótica para tiempos grandes de las soluciones y sobre cómo se relacionan con las soluciones del problema no perturbado. A partir de esta información se calcula las fuerzas que actúan sobre las partículas. El conocimiento de las fuerzas entre las partículas permite conocer diversas propiedades físicas de las partículas. La teoría de dispersión inversa es también de gran importancia en la propagación de ondas, por ejemplo, en tomografía por ultrasonido y en prospección geofísica.

En los proyectos apoyados por PAPIIT se efectuó un estudio completo y detallado de la teoría espectral y de la teoría de dispersión directa e inversa para las ecuaciones matriciales de Schrödinger. Con base en estos resultados se publicó la monografía:

Tuncay Aktosun y Ricardo Weder, 2021. *Direct and Inverse Scattering for the Matrix Schrödinger Equation*. Switzerland: Springer, de 644 páginas, que fue publicada como el volumen 203 de la serie Applied Mathematical Sciences de Springer.

## La paradoja de Bernstein-Landau en física de plasmas

Un fenómeno de fundamental importancia en física de plasmas es el amortiguamiento de Landau. En términos simples, el amortiguamiento de Landau

consiste en que en un plasma de partículas con carga eléctrica que interactúan mediante el campo eléctrico que ellas mismas producen, el campo eléctrico tiende a cero para tiempos grandes, inclusive de manera exponencial. Esto implica que toda la energía del campo eléctrico es transferida a la energía cinética de las partículas. Lo anterior sucede sin que exista ningún mecanismo de disipación.

El amortiguamiento de Landau ha sido, y es, intensamente estudiado tanto en la literatura física como matemática. Desde el punto de vista de la física, una razón para el gran interés actual en este tema es el proyecto International Thermonuclear Experimental Reactor (iter; [www.iter.org](http://www.iter.org)), que es un gran Tokamak (por el acrónimo en ruso de cámara toroidal con bobinas magnéticas) que está siendo construido en el sur de Francia y que se espera que desempeñe un papel importante en el desarrollo de la energía de fusión. Esto consiste en reproducir en Tokamaks la manera en que se produce energía en el sol mediante la fusión de átomos ligeros. La energía de fusión promete ser una gran fuente de energía renovable y poco contaminante. Además de su interés matemático intrínseco, una razón por la que existe una gran actividad de investigación matemática en esta área es la medalla Fields que le fue otorgada a C. Villani en 2010, en parte por sus resultados fundamentales en el amortiguamiento de Landau no lineal.

Otro remarcable aspecto de este problema es la paradoja de Bernstein-Landau que consiste en que si el plasma de partículas cargadas está en la presencia de un campo magnético externo, no importa cuán pequeño sea, el comportamiento del campo eléctrico cambia drásticamente. En lugar de tender a cero se comporta de manera oscilatoria en el tiempo. El fenómeno es conocido en la literatura como la paradoja de Bernstein-Landau porque parece paradójico que un campo magnético externo, que puede ser arbitrariamente pequeño, pueda cambiar de manera tan drástica el comportamiento en el tiempo del campo eléctrico.

En los proyectos apoyados por PAPIIT se formuló la paradoja de Bernstein-Landau como un problema de análisis funcional. Específicamente, como un problema de perturbación singular del operador que gobierna la dinámica del plasma y del campo eléctrico en la presencia del campo magnético externo. De esta manera se puede entender la paradoja de Bernstein-Landau y explicar de manera simple por qué y cómo se produce este fenómeno. Por otra parte, se descubrió aspectos nuevos del problema, como la existencia de soluciones independientes del tiempo que describen configuraciones estáticas del plasma y del campo eléctrico, en presencia del campo magnético externo. Estos resultados fueron publicados en el artículo siguiente:

Frédérique Charles, Bruno Després, Alexander Rege y Ricardo Weder 2021. “The magnetized Vlasov-Ampère system and the Bernstein-Landau paradox”, *Journal of Statistical Physics* **183**: 23, pp. 57.

## El efecto Casimir con condiciones dinámicas en la frontera

El efecto Casimir es un fenómeno remarcable cuya naturaleza es intrínsecamente cuántica, no se presenta en la física clásica. Es, sin duda, un fenómeno fundamental en la física cuántica. Una forma simple de explicarlo es la siguiente: en la física clásica las fuerzas son producidas por la materia y en el vacío en el que no hay materia las fuerzas son idénticamente cero. Esto cambia drásticamente en la física cuántica. El remarcable efecto Casimir consiste en que un campo cuántico que está en un estado de vacío, esto es en un estado en el cual no hay partículas, o en otros términos sin que exista materia, puede de todas maneras producir fuerzas en objetos macroscópicos como placas metálicas. Esto sucede debido a fluctuaciones del vacío cuántico. Este fenómeno ha sido, y es, estudiado intensamente desde el punto de vista físico, teórico y experimental, y desde el punto de vista matemático, en diversas configuraciones; ya sea con una sola placa, con dos placas y en cavidades. En el efecto Casimir estático las placas están fijas. En el efecto Casimir dinámico las placas se mueven en el tiempo, por ejemplo, de manera periódica. Además ha sido, y es, estudiado intensamente el efecto Casimir con placas fijas, pero con las condiciones en la frontera, en las placas, dinámicas. Esto es, las condiciones en la frontera dependen del tiempo. Este caso es complementario del efecto Casimir dinámico, en el que las condiciones en la frontera, en las placas, son independientes del tiempo, pero estas últimas se mueven en el tiempo.

En los proyectos financiados por PAPIIT se estudió el efecto Casimir en el caso de una cavidad unidimensional en la que se encuentra un campo cuántico en el interior de la cavidad. Además existe otro campo cuántico en una de las fronteras de la cavidad. El campo cuántico en la frontera de la cavidad fue descrito mediante condiciones dinámicas dependientes del tiempo en esa frontera. Se utilizó herramientas de análisis funcional, en particular de la teoría espectral de ecuaciones ordinarias con condiciones en la frontera que dependen del parámetro espectral. Esto permitió tratar las condiciones dinámicas en la frontera mediante un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert extendido. Se estu-

dió los estados de Hadamard apropiados para el campo cuántico en la cavidad y se calculó las cantidades físicamente relevantes como la polarización del vacío, la densidad de energía de Casimir, la energía total de Casimir, así como la fuerza de Casimir. Estos resultados fueron publicados en las siguientes contribuciones:

Benito A. Juárez-Aubry y Ricardo Weder. 2021. “Quantum field theory with dynamical boundary conditions and the Casimir effect: coherent states”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **54**: 105203, pp. 34

Benito A. Juárez-Aubry y Ricardo Weder. 2022. “A short review of the Casimir effect with emphasis on dynamical boundary conditions”. *Suplemento de la Revista Mexicana de Física. Joint Proceedings of the XXXV Annual Meeting of the DPYC-SMF & Mexican School of Particles and Fields* **3**, núm. 2: 020714, pp. 7.

Benito A. Juárez-Aubry y Ricardo Weder. 2023. “Quantum field theory with dynamical boundary conditions and the Casimir effect”. En *Theoretical Physics, Wavelets, Analysis, Genomics: an Interdisciplinary Tribute to Alex Grossmann*. Editado por: Patrick Flandrin, Stéphane Jaffard, Thierry Paul y Bruno Torrèsani. 195-238. Suiza: Birkhäuser.